

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

11 de Março de 2005

Semana 3

1. Determine os valores dos seguintes integrais:

a) $\int_C |z| dz$ em que C é o semicírculo percorrido em sentido directo unindo $-2i$ a $2i$.

b) $\int_C z \cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi .

2. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.

b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

3. Considere a função

$$f(z) = \exp[(-1 + i)\log z] \quad , \quad |z| > 0$$

onde se toma para z o argumento mínimo positivo. Calcule

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

4. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_{\gamma} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

(a) $\oint_{\Gamma} z^3 \cosh z dz$

(b) $\oint_{\Gamma} \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}} dz$

$$(c) \oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + \pi^2} dz.$$

$$(d) \oint_{\Gamma} \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - i\pi)} dz$$

$$(e) \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z - 2\pi i)^3}$$

$$(f) \oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z - i\pi)^{11}} dz.$$

6. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i(x^2 - y^2 + 2xy - 2x).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - 2)^2} dz,$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

7. *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em \mathbb{C} .

Sugestão: Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.